広がる運動計算論
ー剛体リンクから連続柔軟ロッドの高階微分運動学ー

○石垣 泰暉（東京理科大学）　鮎澤 光（産総研）
山本 江 (東京大学)　吉田 英一 (東京理科大学)

This paper extends motion–computation theory from rigid–link systems to flexible rods and establishes an analytical framework capable of computing higher–order differential kinematics beyond accelerations. We reformulate existing spatial transformation matrices into the Comprehensive Motion Transformation Matrix (CMTM), allowing unified forward kinematics. Building on this, we obtain high-order Jacobians for the Piecewise Constant Strain (PCS) model by exploiting matrix exponential. Numerical experiments on a PCS rod show that the proposed method compare with numerical Jacobian maintains a norm error below 10^{-5} up to the 8th derivative, while achieving almost high speed calculation. These results provide a reliable, foundation for gradient-based motion optimization, design, and control of soft or hybrid rigid–soft robots.

1. はじめに

ロボットの運動計算論は，運動を記述するために剛体の位置・姿勢とそれらの時間変化を扱う理論として発展してきた．剛体の姿勢を表現する回転行列や，回転行列に位置情報を加えた同次変換行列を用いて，座標変換や剛体運動を統一的に扱い，剛体リンク系のロボットの運動計算が行われている．またロボットの関節速度空間と手先などのリンクの速度空間の関係を表す基礎ヤコビ行列 [1] の高速な計算法が提案されている．ヤコビ行列を用いて，リンクの位置・姿勢から関節角度を求める逆運動学計算 [2] や運動計画等における最適化問題や，手先の操作自由度を定量化する可操作度 [3] のような感度解析などの研究が行われている．

ロボットの自由度やタスクの複雑さの増大に伴って，ロボットの運動計画や身体設計，運動解析などをを取り扱う手法としての最適化理論の重要性はますます高くなると考えられる．最適化問題を解く上で評価関数の勾配を計算するために，速度に関するヤコビ行列だけでなく，加速度や力に関する勾配を計算する研究が行われている [4, 5]．また，人間の運動解析を行う上で，感情や運動のコツなどを表現するために，運動の躍度やトルクの 1 階，2 階微分等の高階微分情報を評価関数に含めた運動最適化の研究も行われている [6]．このような背景から，回転行列や同次変換行列を拡張した包括運動変換行列 (Comprehensive Motion Transformation Matrix, CMTM)[4] を用いて，加速度より高階な微分情報を計算することが可能な計算論 [7] が提案されている．

剛体で構成されたロボットの運動計算論の発展と同様に，柔軟物で構成されたソフトロボットの分野でも，柔軟構造の変形を扱う運動計算論が発展している．これまでに汎用的な構造を扱うことができる有限要素法ベースの手法 [8] やロッドやシェルなど特定の形状に特化して計算量を削減した手法 [9] などが提案されている．また剛体リンク系の運動計算論を拡張して，柔軟ロッドの変形計算を可能にした Piecewise Constant Strain (PCS) モデル [10] が提案されている．剛体リンク系の運動計算論と同様に，柔軟ロッドにおいて制御や運動最適化に必要な勾配を計算する研究が行われている [11, 12]．一方，これらの研究は加速度に関する勾配にとどまり，躍度などの高階微分情報を計算することは実現できていない．今後，ソフトロボットや柔軟な道具を使った人型システムにおける複雑な運動解析や生成に対して高階微分計算論の必要性が高まることが予測される．

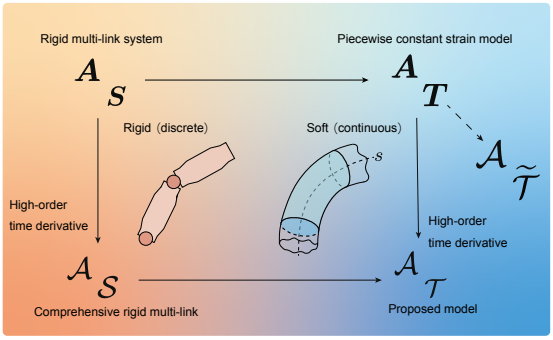

図 1　Overview of expanding motion calculation theory

本稿では，剛体リンク系から柔軟構造に渡ってこれまで拡張されてきた運動計算論を整理し，柔軟ロッドを含むシステムにおいて，高階の時間微分とロボット運動計算論を拡張・汎化する枠組みを提案する．また，CMTM や PCS モデルの導入により，これまで発展してきた運動計算論の考え方と共通の基盤で剛体から柔軟物そして高階微分運動情報までの問題を論じることができると考えている．

以降では $\boldsymbol{O}$ を零行列，$\boldsymbol{E}$ を単位行列とする．また任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $[\boldsymbol{x}\times]$ は歪対称行列を表す．任意の行列 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{X}_n]$ が与えられた時，$[\boldsymbol{X}]_n$ を次式のような下三角行列とする．

$$[\boldsymbol{X}]_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_1 & \ddots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{X}_n & \boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{X}_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

式 (1) を用いて，任意の 6 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6$ $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3)$ に対して $[\boldsymbol{x}\times_6] := [\boldsymbol{X}]_2$ $(\boldsymbol{X} = [[\boldsymbol{x}_1\times]\ [\boldsymbol{x}_2\times]])$ と定義する．$*^{(p)}$ をある物理量 $*$ の p 階微分と表し，任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して演算子 $\widehat{\ }$ を次式のように定義する．

$$\widehat{\boldsymbol{y}}^{(p)} = \boldsymbol{y}^{(p)}/p! \tag{2}$$

また $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \boldsymbol{y}^{(p)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ のような，ある変数の時間微分を並べたベクトル $\boldsymbol{z}$ に対する演算子 $\widehat{\ }$ は次式のような操作とする．

$$\widehat{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} & \cdots & \widehat{\boldsymbol{y}}^{(p)\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

2. 運動計算論

2.1 剛体リンク系の運動計算論

剛体の位置・姿勢を表すために，次式のような空間変換行列 (spatial transformation matrix)[13] を用いる．

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\\ [\boldsymbol{p}\times]\boldsymbol{R} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix} \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ は姿勢行列，$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ は位置ベクトルを表す．剛体リンク系の運動学計算は，以下の式を用いて，ルートリンクから末端リンクまでの位置・姿勢を計算することができる．

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}_{i-1}{}^{i-1}\boldsymbol{A}_i \tag{5}$$

${}^{i-1}\boldsymbol{A}_i$ は Denavit-Hartenberg(D-H) パラメータや Product of Exponential (PoE)[14] を用いて計算することができる．また，空間変換行列の時間方向の接ベクトルを定義し，

$$[\boldsymbol{\eta}\times_6] := \boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{A}} \tag{6}$$

空間速度 (spatial velocity)[13] と呼ぶ．式 (5) の両辺を時間微分すると次式が求まり，各リンクの空間速度を求める微分順運動学計算を行うことができる．

$$\boldsymbol{\eta}_i = {}^i\boldsymbol{A}_{i-1}\boldsymbol{\eta}_{i-1} + {}^i\boldsymbol{\eta}_{i-1,i} \tag{7}$$

ここで，${}^i\boldsymbol{\eta}_{i-1,i}$ は以下のように計算することができる．

$${}^i\boldsymbol{\eta}_{i-1,i} = \boldsymbol{S}_i\dot{\boldsymbol{\theta}}_i \tag{8}$$

ここで関節の種類に対応した $\boldsymbol{S}_i$ は選択行列 [4] で，$\boldsymbol{\theta}_i$ は関節角度ベクトルである．

式 (5), (7), (8) を利用して，$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\theta}_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (k は関節の数) として，次式のようにリンク i に対する基礎ヤコビ行列 $\boldsymbol{J}_i$[1] を計算することができる．

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\theta}} = \sum_j \boldsymbol{J}_{(i,j)}\dot{\boldsymbol{\theta}}_j, \quad \boldsymbol{J}_{(i,j)} = {}^i\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{S}_j \tag{9}$$

2.2 包括運動変換行列による高階微分運動計算論

力の微分情報を扱う上でロボットなどの剛体リンク系の運動方程式が加速度情報を含むことから，加速度情報までの微分計算を包括的に扱うために，回転行列や同次変換行列や空間変換行列などの運動変換行列とその時間変化を同時に表現する包括運動変換行列 (Comprehensive Motion Transformation Matrix, CMTM)[4] が提案され，さらに高階微分までを扱うことが可能な理論に拡張されている [7]．ここでは次式のような空間変換行列を用いた包括運動変換行列による運動計算について説明する．

$$\mathcal{A} = [\boldsymbol{X}]_n, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-1}\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}_{i+1} = \frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}\boldsymbol{A}_{i-j}\left[\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(j)}\times_6\right] \tag{11}$$

包括運動変換行列において，式 (5) と同様に次式のような連鎖律が成り立ち，0 から (n-1) 階時間微分情報の運動学演算を 1 つの式で表現することができる．

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i-1}{}^{i-1}\mathcal{A}_i \tag{12}$$

また空間速度と同様に接ベクトルを定義することができる．

$$[\widehat{\boldsymbol{\zeta}}]_n = \mathcal{A}^{-1}\dot{\mathcal{A}} \tag{13}$$

式 (7) と同様に式 (12) から次式を導くことができる．

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_i = {}^i\mathcal{A}_{i-1}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{i-1} + {}^i\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{i-1,i} \tag{14}$$

ここで $\widehat{\boldsymbol{\chi}}_i = \begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i^{\mathrm{T}} & \cdots & \widehat{\boldsymbol{\theta}}_i^{(n-1)\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ とし，

$${}^i\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{i-1,i} = \mathcal{S}_i\dot{\widehat{\boldsymbol{\chi}}}_i, \quad \mathcal{S}_i := \mathrm{diag}([\boldsymbol{S}_i\ \cdots\ \boldsymbol{S}_i]) \tag{15}$$

とした．式 (12)，(14)，(15) より式 (9) と同様に基礎ヤコビ行列の計算法を用いて，高階微分情報に関するヤコビ行列を計算することができる．[4] では運動学だけでなく，動力学に拡張し，リンクに加わる力や関節トルク，また人型ロボットの安定性の議論に用いられる zero moment point (ZMP) [15] に関するヤコビ行列の計算法が提案されている．また包括運動変換行列 $\mathcal{A}$ は，同次変換行列や空間変換行列と同様にリー群の性質を持ち，数理分野で発展した計算理論を適用できる．

2.3 柔軟ロッドの運動計算論

図 1 に示すように柔軟ロッドの中心軸を s として，中心軸の曲線を空間変換行列で表現した場合に，空間変換行列 $\boldsymbol{A}$ の s 方向の接ベクトルをひずみとして以下のように定義する．

$$[\boldsymbol{\xi}\times_6] = \boldsymbol{A}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial s} \tag{16}$$

ひずみ $\boldsymbol{\xi}$ を用いることで，ロッドの変形を表現することができる．piecewise constant strain (PCS) モデル [10] は，柔軟ロッドを有限個のセグメントに区切り，各セグメント内においてひずみを一定と仮定したモデル

である．ロッドの区間 $s \in [s_{i-1}, s_i]$ をセグメント i とした時，セグメント i のひずみを $\boldsymbol{\xi}_i := \boldsymbol{\xi}(s)$ と定義する．空間変換行列の時間方向と空間方向の微分において $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ が成り立つことから，次式が求まる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial s} + [\boldsymbol{\xi}\times_6]\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \tag{17}$$

セグメント内でひずみ一定の条件の下で，式 (17) は線形行列微分方程式となり，$\boldsymbol{\eta}$ について次式のように導くことができる．

$$\boldsymbol{\eta}_i = {}^i\boldsymbol{A}_{i-1}\boldsymbol{\eta}_{i-1} + \boldsymbol{T}_i\dot{\boldsymbol{\xi}}_i \tag{18}$$

ただし，$\boldsymbol{T}_i$ を以下のように定義した（$\ell_i := s_i - s_{i-1}$）．

$$\boldsymbol{T}_i = \int_0^{\ell_i} \exp\bigl(-s[\boldsymbol{\xi}_i\times_6]\bigr)\mathrm{d}s \tag{19}$$

この時，${}^i\boldsymbol{\eta}_{i-1,i} = \boldsymbol{T}_i\dot{\boldsymbol{\xi}}_i$ として，剛体リンク系と同様に基礎ヤコビ行列を計算することができる．

Ishigaki ら [12] は，式 (18) を微分して，包括運動変換行列を用いて表現することで，次式のように PCS モデルの微分運動学計算を拡張した．

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_i = {}^i\mathcal{A}_{i-1}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{i-1} + \widetilde{\mathcal{T}}_i\dot{\widehat{\boldsymbol{\psi}}}_i \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\psi}_i = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{T}} & \dot{\boldsymbol{\xi}}_i^{\mathrm{T}} & \ddot{\boldsymbol{\xi}}_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_i & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\dot{\boldsymbol{\xi}}_i & \boldsymbol{T}_i & \boldsymbol{O} \\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{T}}_i}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{T}_i}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\ddot{\boldsymbol{\xi}}_i & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{T}}_i}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}_i}\dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \dot{\boldsymbol{T}}_i & \boldsymbol{T}_i \end{bmatrix} \tag{22}$$

また，剛体リンク系と PCS モデルの運動を同一の表現で記述することによる一般化されて運動計算法が提案されている [11, 12]．

3. 柔軟ロッドのための高階微分運動計算論

前節で述べたように，柔軟ロッドにおいて式 (22) のように，加速度の微分情報までの勾配計算が可能である．一方で，剛体リンク系における最適化計算において需要が生じたように，柔軟ロッドにおいても加速度よりも高階な微分情報の計算論が必要であると予測される．式 (22) で示す $\widetilde{\mathcal{T}}_i$ に対して，左下部分行列要素の微分を新たな行や列に追加して，再帰的に行列を拡張することは可能であるが，積の微分を考えると項が増大し，式が複雑となることが予想される．そこで，包括運動変換行列を利用して，より容易に高階微分情報を計算可能な理論を提案する．

$\mathcal{A}$ の中心軸方向の接ベクトルを以下のように表す．

$$[\widehat{\psi}]_n := \mathcal{A}^{-1}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} \tag{23}$$

上式は式 (21) と異なる表現になっているが，式 (23) から $\boldsymbol{\psi}$ の要素を計算し，$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ を用いて整理すると一致することを確認できる．PCS モデルと同様に $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$ であるので，次式が与えられる．

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\zeta}}}{\partial s} + [\widehat{\psi}]_n\widehat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\psi}}}{\partial t} \tag{24}$$

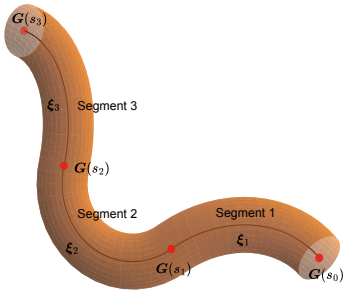

図 2　Overview of PCS model

PCS モデルではセグメント内で $\boldsymbol{\xi}$（およびその高階微分）は一定であるため，それらを要素とした $\widehat{\psi}$ もセグメント内で一定である．そのため，式 (24) を次式のように解くことができる．

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_i = {}^i\mathcal{A}_{i-1}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{i-1} + \mathcal{T}_i\dot{\widehat{\boldsymbol{\psi}}}_i \tag{25}$$

$$\mathcal{T}_i = \int_0^{\ell_i} \exp(s[\widehat{\boldsymbol{\psi}}_i]_n)ds \tag{26}$$

式 (25) より，剛体リンク系の基礎ヤコビ行列計算 (式 (9)) と同様に次式のようにヤコビ行列を計算することができる．

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_i = \mathcal{J}_i\dot{\widehat{\boldsymbol{\psi}}} = \sum_j \mathcal{J}_{(i,j)}\dot{\widehat{\boldsymbol{\psi}}}_j, \quad \mathcal{J}_{(i,j)} = {}^i\mathcal{A}_j\mathcal{T}_j \tag{27}$$

また，$\mathcal{A}$，$\mathcal{T}_j$ は加速度以上の高次時間微分に関する運動計算を行うことが出来る．$\mathcal{T}_i$ は行列指数関数で表され，行列指数関数や $\mathcal{A}$ の持つリー群の性質を利用して，ヤコビ行列だけでなくヘッセ行列の計算への拡張も期待できる．また [11, 12] で行われているように動力学的な勾配の計算にも拡張可能である．

4. 数値計算による検証

前節で提案した高階微分情報のヤコビ行列計算の検証のため，PCS モデルにおける式 (27) による計算と数値微分との比較を行った．提案手法において式 (26) を計算するために今回はガウス求積による積分と数値計算による行列指数関数を用いた．また，数値微分では，包括運動変換行列を使った運動学計算を用いて数値微分することでヤコビ行列を計算した．以降の数値は各条件において 10 回計算した結果の平均値を評価した．

まず図 2 のような 3 セグメントの PCS モデルにおいて，ひずみの n 階時間微分のヤコビ行列計算の検証を行った．1 階微分から 8 階微分までにおける提案手法によるヤコビ行列と数値微分によるヤコビ行列の行列差ノルムを図 3 の上に示す．高階微分になるにつれて差は大きくなるが，全体として 10^{-5} 程度の誤差で計算ができていることがわかる．また提案手法と数値微分によるヤコビ行列計算の計算時間を比較した．行列差ノルムの比較と同様に 1 階微分から 8 階微分までのヤコビ行列計算の計算時間を図 3 の下に示す．次数が大きくなるにつれて計算時間の桁が大きくなるため，計算時間を対数メモリで表した．図 3 より，数値微分と

比較して，提案手法は 10 から 100 倍程度速く計算できていることがわかる．

また，自由度が増える場合の計算時間の比較を行った．ひずみの 5 階時間微分までのヤコビ行列計算において，セグメント数を 1 から 10 に増やした時のヤコビ行列の計算時間を図 4 に示す．ここで各セグメントの自由度は 6 であり，各セグメント長を 1m とした．図 4 より，セグメント数に関わらず，提案手法は，数値微分と比較して約 100 倍程度高速に計算できている．

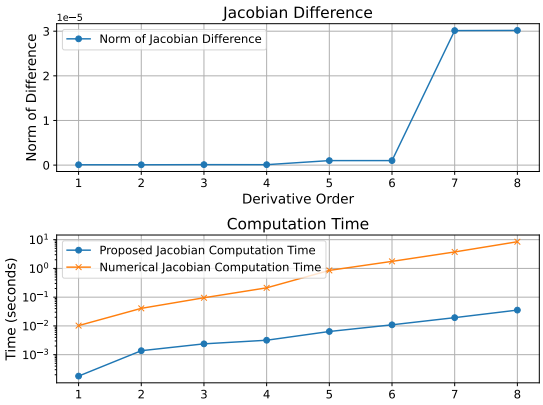

図 3 Comparing the proposed method and numerical differentiation with changes in the order of the time derivative: the difference in the norm of the Jacobian matrix (top) and computation time (bottom)

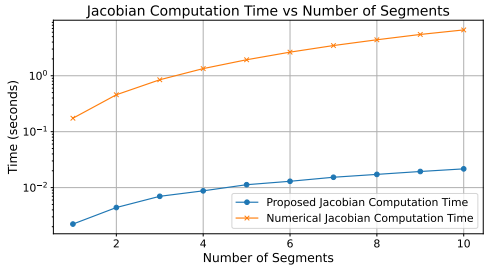

図 4 Comparing calculation time of Jacobian matrix between the proposed method and numerical differentiation with changes in the number of segments in PCS model

5. まとめ

本研究ではこれまで運動学計算を整理し，柔軟ロッドを離散化した PCS モデルにおける高階運動計算論を提案し，数値計算による検証を行った．

(1) これまでのロボティクスの運動計算論を整理し，柔軟ロッドの運動計算において，最適化計算を見据えた高階微分可能な計算論に一般化した．
(2) 包括運動変換行列による運動計算を柔軟ロッドまで一般化し，高階微分運動計算法を提案した．
(3) 提案手法と数値微分に 8 階微分までヤコビ行列計算の結果を比較し，その差が 1×10^{-5} であり，提案手法では，微分の階数とモデルの自由度を変化させたとしても，数値微分に比べて約 100 倍高速に計算できることを確認した．

本稿では，運動学における幾何的な関係について議論し，半径方向に膨張しないロッドを扱ったが，同次変換行列に膨張・収縮を加えた相似変換行列によるロッドの膨張・収縮を含む運動計算論 [16] や [4, 7, 12] で議論されているような動力学へ発展させることが可能である．また，本稿で述べたような運動に関する勾配計算は，運動制御や解析，設計等における運動の最適化計算において重要な役割を果たす．

なお，本研究は JSPS 科研費 25K21310，22H05002，21H01282 の助成を受けた．

参 考 文 献

[1] O. Khatib. A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *Int. J. Robot. Autom.*, Vol. 3, No. 1, pp. 43–53, 1987.
[2] 杉原. 逆運動学の数値解法. 日本ロボット学会誌, Vol. 34, No. 3, pp. 167–173, 2016.
[3] 吉川. ロボットアームの可操作度. 日本ロボット学会誌, Vol. 2, No. 1, pp. 63–67, 1984.
[4] K. Ayusawa and E. Yoshida. Comprehensive theory of differential kinematics and dynamics towards extensive motion optimization framework. *IJRR*, Vol. 37, No. 13-14, pp. 1554–1572, 2018.
[5] J. Carpentier, G. Saurel, Gabriele B., J. Mirabel, et al. The pinocchio c++ library: A fast and flexible implementation of rigid body dynamics algorithms and their analytical derivatives. In *Proc. of IEEE/SICE SII*, pp. 614–619, 2019.
[6] J. F-S. Lin, V. Bonnet, A. M. Panchea, N. Ramdani, et al. Human motion segmentation using cost weights recovered from inverse optimal control. In *Proc. of IEEE Humanoids*, pp. 1107–1113, 2016.
[7] V. Samy, K. Ayusawa, and E. Yoshida. Generalized comprehensive motion theory for high-order differential dynamics. In *RSS*, 2021.
[8] F. Faure, C. Duriez, H. Delingette, J. Allard, et al. Sofa: A multi-model framework for interactive physical simulation. *Soft tissue biomechanical modeling for computer assisted surgery*, pp. 283–321, 2012.
[9] S. S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*, Vol. 107. 2005.
[10] F. Renda, et al. Discrete cosserat approach for multisection soft manipulator dynamics. *IEEE Trans. Robot.*, Vol. 34, No. 6, pp. 1518–1533, 2018.
[11] A. T. Mathew, F. Boyer, V. Lebastard, and F. Renda. Analytical derivatives of strain-based dynamic model for hybrid soft-rigid robots. *IJRR*, p. 02783649251346209, 2024.
[12] T. Ishigaki, K. Ayusawa, and K. Yamamoto. Unified framework of gradient computation for hybrid-link system and its dynamical simulation by implicit method. *IEEE RAL*, 2025.
[13] R. Featherstone. *Rigid body dynamics algorithms*. Springer, 2014.
[14] K. M. Lynch and F. C. Park. *Modern robotics*. Cambridge University Press, 2017.
[15] M. Vukobratović and J. Stepanenko. On the stability of anthropomorphic systems. *Mathematical biosciences*, Vol. 15, No. 1-2, pp. 1–37, 1972.
[16] 工藤, 石垣, 鮎澤, 山本. 相似変換リー群による膨張収縮変形を含むソフ トロボットシミュレーション. 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会, pp. 2P1–A12.