

数式処理によるロボット機構の自由度解析

—基本アルゴリズムと適用例—

有川 敬輔*

Mobility Analysis of Robotic Mechanisms Using Computer Algebra

—Basic Algorithm and Application Examples—

Keisuke Arikawa*

Kuzbach criterion is very useful to evaluate the mobility of robotic mechanisms. However, it cannot correctly evaluate mobility of some mechanisms (e.g. overconstrained mechanisms, mechanisms with Passive DOF etc.). The links and joints form constraints in the mechanisms, and we can express the constraints as algebraic equations. Therefore the mobility evaluation of robotic mechanisms has close connection with analyzing simultaneous algebraic equations (SAE). Based of this idea, we propose a new method to automatically evaluate the mobility of robotic mechanisms by using computer algebra. First, we explain Groebner Bases which disclose the fundamental structures of SAE, and show the basic idea of mobility analysis using Groebner Bases. Then, we show that the dual quaternion formulations are effective to express the constraint equations as SAE, and show the method to systematically form constraint equations of the spatial mechanisms containing various types of joints. Next, we show the method to evaluate the mobility by analyzing the Groebner Bases of the constraint equations. Finally, we show three examples of evaluating mobility using the proposed method, and show that it can correctly evaluate the mobility even of the mechanisms for which Kuzbach criterion is not applicable.

Key Words: Mobility Analysis of Robotic Mechanisms, Computer Algebra, Groebner Bases, Dual Quaternion Form Constraint Equation

1. はじめに

自由度はロボット機構において最も基本的かつ重要な特性であるが、その判定には次式のクッツバハの式が広く用いられている。

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i \quad (1)$$

ここで、 F は自由度、 n はリンク数、 j は関節数、 f_i は関節 i の自由度を表し、 λ は空間機構の場合には通常 6 を、平面機構の場合には通常 3 をとる。なお、本稿で言うロボット機構の自由度 F は、二つの参照リンク（マニピュレータでは土台と手に相当するリンク）間の相対的な運動の自由度を指すものとする。クッツバハの式では、リンクと関節の数を数え、関節の自由度を合計するという単純で機械的な操作しか要求されないため、容易に適用することが可能である。この意味においてクッツバハの式は非常に有用な自由度判定法である。しかし、一方で、**Fig. 1** に示した機構のように、この式を機械的に適用した

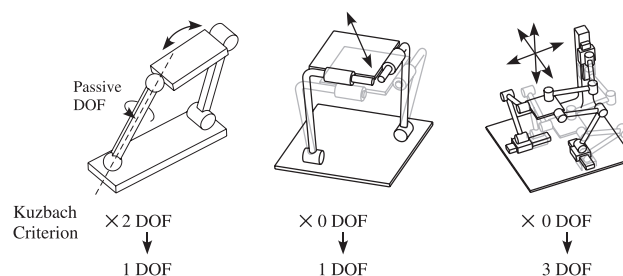


Fig. 1 Kuzbach-exceptional mechanisms

だけでは自由度を正しく判定することのできない機構も数多く存在することを認識しておく必要がある [1]. 「クッツバハの式だけに頼ると、自由度という最も基本的な特性を誤って判定する恐れがある」、このことは、既存のロボット機構の枠に入らない新たな機構を設計しようとする際、特に深刻な問題となる [2].

これまで、より汎用性の高い自由度判定法を目指し、数々の有用な手法が提案されている（例えば文献 [3]~[10]）. Gogu [6] は、過去約 150 年間に提案されてきた 35 種類の自由度判定法について適用限界を指摘するとともに、それらの手法が、リンク数、関節数、ループ数等のカウントによる方法と、機構に含

原稿受付 2008 年 12 月 19 日

*神奈川工科大学

*Kanagawa Institute of Technology

■ 本論文は学術的に評価されました。

まれる拘束条件式のヤコビ行列のランク計算に基づく方法に大別されることを指摘している。カウントによる方法は、容易に適用できるという利点がある反面、多くは関節軸どうしの平行、直交といった特殊な幾何学的関係を考慮しないため、クッツパッハの式と同様の適用限界を生じる。また、関節軸どうしの特殊な幾何学的関係や、Passive DOF（手先と土台の間の相対運動に影響を与えない運動の自由度）の存在を考慮し、クッツパッハの式に補正を加えた自由度評価式も提案されているが[3]、適用の過程で発見的手続きを必要とするため、これらによって機械的に自由度を判定することは困難である。一方、ヤコビ行列のランク計算に基づく方法は、カウントによる方法に比べて、汎用性、機械的適用可能性は高い[7]~[9]。しかし、Rico [10] が指摘するように、ヤコビ行列のランク計算を基に算出される自由度は、機構のある状態における瞬間的な運動の自由度であり、必ずしも有限の運動の自由度を保証するものではない。また、ヤコビ行列のランク計算においては、数値が零であるか否かの判定が要求されるが、その際、数値計算誤差の影響が問題になりやすい。これら以外にも、群論の知見を活用した自由度判定法が提案されている [4] [5]。プラットフォーム型機構について、各リムが手先に与える運動が属する三次元ユークリッド運動群の部分群を求め、それらの集合演算から自由度を算出するものであるが、適用可能な機構が限定されており、機械的な判定が困難であるのが現状である。Müller [11] は、これらの主要な自由度判定法について、機構の状態を表現する変数によって構成される多様体の構造の視点から厳密な解釈を与え、さらに、クッツパッハの式では自由度を判定できない過拘束機構は、関節軸どうしの幾何学的関係の変動に対して本質的に不安定であることを証明している。このことは、誤差の影響が避けられない数値計算による自由度判定には限界があることを示唆している。

これらの手法とは別に、最近、Tuomela [12] は、「数式処理」によって自由度を判定する方法を示した。数式処理とは、数式の展開、簡略化、因数分解、方程式の求解等を、シンボリックな操作によって系統的に行う手法であり、計算機技術の向上を背景にその有用性が注目されている [13]~[16]。ロボット工学においては、一般 6 自由度シリアルマニピュレータの逆運動学問題の厳密解の導出、過拘束機構の運動学解析等、特に運動学の分野でその有効性が示されている [3] [17]~[21]。Tuomela の手法は、機構の自由度を、機構の状態を表現する変数によって構成される多様体（連立代数方程式の零点として定義される）の次元と定義し、その次元を数式処理により求めるというものである。この方法で求まる自由度は、ヤコビ行列のランク計算から求まる自由度のような局所的なものではなく全体的なものであり、しかも、手法自体がシンボリックな計算のみで構成されているため、数値計算誤差の影響をまったく受けない。この意味で、従来手法の欠点を補う極めて有効な手法である。しかし、この手法では、拘束条件式を構成する過程、拘束条件式を数式処理して自由度を判定する過程において発見的な手続きが要求されるため、種々の機構に機械的に適用して自由度を判定することは困難である。そのほか、Passive DOF を分離できない、リンクの状態を個々に表現するため多くの変数を要する等の問題点を含む。そこで、本研究では、数式処理の利点を生かしつ

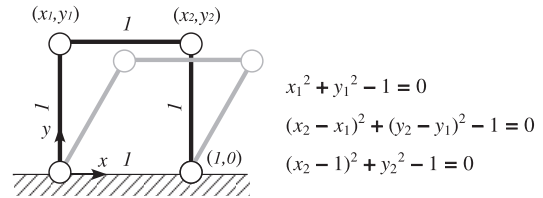


Fig. 2 Mechanisms and algebraic equations

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - 1 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 1 &= 0 \\ (x_2 - 1)^2 + y_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

つも、発見的手続きを必要とせず機械的に適用可能な自由度判定法を明らかにすることを目的とする。

Fig. 2 に示した平面 4 節リンク機構を例に本稿の概略を説明する。関節の座標 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) が定まると機構の状態も定まるが、これらの座標変数の値は自由に設定できるわけではない。リンクの長さが不変という拘束条件を満足する範囲の値しかとることができない。この拘束条件は、連立代数方程式 $\{ x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 1 = 0, (x_2 - 1)^2 + y_2^2 - 1 = 0 \}$ により表現できるが、このなかに、機構の自由度に関する情報が含まれているはずである。Fig. 2 の機構の自由度は 1 であるが、このことは、4 個の変数 x_1, y_1, x_2, y_2 が、3 個の方程式によって拘束されていることに対応していると考えられる $(4 - 3 = 1$ 自由度)。しかし、このような単純な自由度判定がいつも通用するわけではない。そこで、数式処理を用い、この連立代数方程式の構造を分析することにより、自由度の情報を抽出することを考える。また、Fig. 2 の機構では、拘束条件を容易に連立代数方程式として表現できたが、直動関節、円筒関節、球関節等の多様な関節によって構成された空間機構に含まれる拘束条件を、機械的かつ効率的に連立代数方程式として表現することは自明な問題ではない。本稿では、これらの事項について論じ、機械的に適用可能な数式処理による一つの自由度判定法を提案する。そして、提案する自由度判定法によればクッツパッハ例外とされる機構の自由度も機械的に判定できることを、いくつかの例とともに示す。

2. 数式処理による自由度判定原理

2.1 変数の数と拘束式の数

Fig. 3 に示すように、二つの球面の共有部分を運動する点 A の自由度について考える。これらの球面の共有部分は、式 (2) に示す多項式 F_1, F_2 により定義される連立代数方程式 $\{F_1 = 0, F_2 = 0\}$ の解として表現される。

$$\begin{cases} F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ F_2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - 1 \end{cases} \quad (2)$$

点 A の座標を表す三つ変数 x, y, z が、二つの方程式 $F_1 = 0, F_2 = 0$ により拘束されていることから、点 A の自由度は $3 - 2 = 1$ であると推測できる。この結果は、これらの球面の共有部分は円であり、その円上を動く点 A の自由度は 1 であるという事実と確かに一致している。このことを一般化すると次式のような自由度判定式が考えられる。

$$F = N_v - N_c \quad (3)$$

ここで、 F は自由度、 N_v は変数の数、 N_c は拘束式の数を表

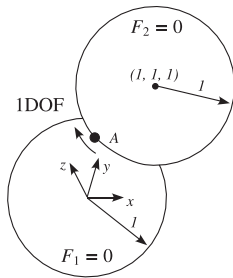


Fig. 3 Particle on intersection of two spheres

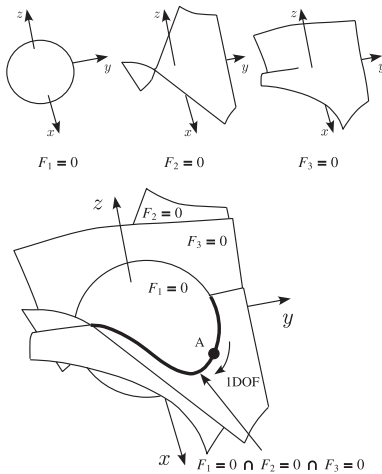


Fig. 4 Particle on intersection of three curved surfaces

す。クッツパッハの式 (式 (1)), および, そこから派生するループモビリティ判定式 [3] [6] 等の数々の自由度判定式の本質は式 (3) にある。

ところが, 拘束条件式の独立性を考慮せず単に変数の数と拘束式の数だけを数えただけでは, 自由度を正しく判定できるとは限らない。例えば, 式 (4) に示す三つの方程式 $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ により定義される三つの代数曲面の共有点を運動する点 A の自由度を考えよう (Fig. 4 参照)。

$$\begin{cases} F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ F_2 = 2xy + 2z - 1 \\ F_3 = x^3 + 2x^2y + xy^2 + 4xy \\ \quad + xz^2 + 2xz - 3x + 4z - 2 \end{cases} \quad (4)$$

三つの変数 x, y, z に対して, 三つの拘束式が存在するため, $N_v = 3, N_c = 3$ を式 (3) に代入すると自由度 $F = 0$ と求まる。しかし, Fig. 4 から分かるように, 実際の自由度は 1 である。

2.2 グレブナ基底

提案するロボット機構の自由度判定法においては, 連立代数方程式を数式処理することにより得られる「グレブナ基底」が

主要な役割を果たす。そこで, 本節では式 (4) を例として, グレブナ基底について説明する。ここでは, 提案する自由度判定法に深くかかわる事項についてのみ説明するが, グレブナ基底の詳細については, 文献 [13]~[16] 等を参照されたい。

変数 x, y, z によって構成された多項式全体を $X[x, y, z]$, P_i を $P_i \in X[x, y, z]$ なる任意の多項式とする。このとき, $P_1F_1 + P_2F_2 + P_3F_3$ で表される多項式全体を「基底 F_1, F_2, F_3 で生成されるイデアル」と呼び, これを $\langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ と表す。つまり, このイデアルを I とすると,

$$\begin{aligned} I &= \langle F_1, F_2, F_3 \rangle \\ &= \{P_1F_1 + P_2F_2 + P_3F_3 \mid P_1, P_2, P_3 \in X[x, y, z]\} \end{aligned} \quad (5)$$

例えば, 多項式 $-y^3 + 2xy^4 + 2y^3z - 2z^4 + x^2z^4 + y^2z^4 + z^6$ は $z^4F_1 + y^3F_2 + 0F_3$ と表されるため I の元であるが, 多項式 $x + y + z$ は I の元ではない。

$F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ を式 (5) に代入すればイデアル I に含まれるすべての多項式が零になることから, 連立代数方程式 $\{F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0\}$ (以後, $F = 0$ と書く) の解は, I に含まれるすべての多項式を零に等値した無数の方程式からなる連立代数方程式 (以後, $I = 0$ と書く) の解でもある。また, $F_1, F_2, F_3 \in I$ であることから, $I = 0$ の解は $F = 0$ の解でもある。つまり, 連立代数方程式 $F = 0$ と $I = 0$ の解は一致する。このことから, I が別の基底 $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ によって生成されたとすると, つまり, $I = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle = \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle$ とすると, $F = 0$ と $I = 0$ の解が一致し, $G = 0$ と $I = 0$ の解が一致するため, $F = 0$ と $G = 0$ の解が一致することになる。つまり, 連立代数方程式 $F = 0$ を解く代わりに, $G = 0$ を解いても同じ解が得られることになる。

グレブナ基底とは, 与えられたイデアルの基底から計算される, 特別な性質を持った基底のことをいう。グレブナ基底を計算するには, 記号としての大小関係を定める「変数順序」と, 多項式を構成する単項式の大小関係を定める「項順序」を指定する必要がある。特に, 「辞書式順序」と呼ばれる項順序で計算したグレブナ基底は, 後に説明するように, 変数を逐次的に消去した形の多項式で構成されるため, 方程式の構造を調べるのに非常に都合が良い。

変数順序 $x \succ y \succ z$ の下での辞書式順序とは, アルファベット順 $a \succ b \dots \succ z$ の代わりに $x \succ y \succ z$ を用いて, 文字どおり辞書の索引と類似の方法によって単項式の大小関係を規定するものである (より上位の変数から順に次数を比べていき, 単項式の大小関係を定める)。例えば, 単項式 $xyz^2 (= x^1y^1z^2)$ と $xy^2 (= x^1y^2z^0)$ を比べた場合, 最上位変数 x の次数はどちらも同じであるが, 次に上位の変数 y の次数は xyz^2 のほうが大きいため, $xyz^2 \prec xy^2$ となる。

変数順序と項順序を定めることにより, 単項式の大小関係が定まるが, ある多項式を構成する単項式のなかで最大のものを「頭項」と呼ぶ。先に述べた, グレブナ基底の特別な性質とは, 「イデアルに属するすべての多項式の頭項が, 基底を構成するいずれかの多項式の頭項によって割り切れる」というものである[†]。

[†]式 (4) において, イデアル I の元である $4y^2F_1 + (-2xy + 2z - 1)F_2 + 0F_3 = 4y^4 + 4y^2z^2 - 8y^2 + 4z^2 - 4z + 1$ の頭項 y^4 は, $F_1 \sim F_3$ のいずれの頭項 x^2, xy, x^3 によっても割り切れない。このため, 式 (4) はグレブナ基底ではない。なお, 任意のイデアルに対し, グレブナ基底が存在することが知られている。

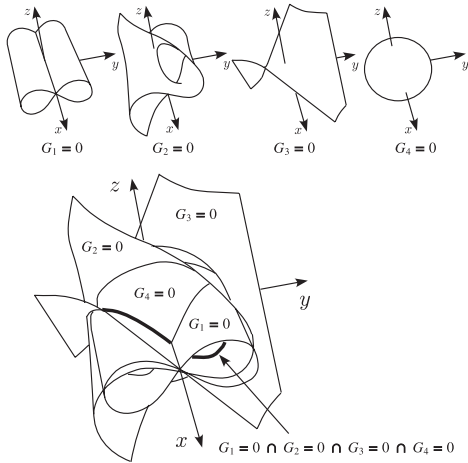


Fig. 5 Curved surfaces and their intersection defined by Groebner Bases

式 (4) のグレブナ基底を、変数順序を $x \succ y \succ z$ 、項順序を辞書式順序として計算すると次式ようになる。

$$\begin{cases} G_1 = 4y^4 + 4y^2z^2 - 8y^2 + 4z^2 - 4z + 1 \\ G_2 = 2xz - x - 2y^3 - 2yz^2 + 4y \\ G_3 = 2xy + 2z - 1 \\ G_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{I} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle = \langle G_1, G_2, G_3, G_4 \rangle$ であり、上述のように、連立代数方程式 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ と $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ の解は一致することに注意されたい。なお、式 (6) の各多項式は、例えば G_2 において $xz \succ x \succ y^3 \succ yz^2 \succ y$ のように、大きな単項式から順に表示しており、 $G_{1\sim 4}$ の頭項は、それぞれ、 y^4 、 xz 、 xy 、 x^2 である。また、 $G_{1\sim 4} = 0$ により定義される四つの代数曲面、および、それらの共有点の集合を Fig. 5 に示す。Fig. 4 と Fig. 5 を比較することにより、 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ と $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ の解が等しいことを、視覚的にも確認することができる。

2.3 自由度判定

イデアル \mathbf{I} のなかに、最低位の変数 z のみで構成される多項式が含まれていたと仮定する。このとき、イデアルに属するすべての多項式の頭項が、基底を構成するいずれかの多項式の頭項によって割り切れるというグレブナ基底の性質から、グレブナ基底のなかに、頭項が z のみで表される多項式が存在するはずである。さらに、辞書式順序においては、最低位の変数 z 以外の変数を含むすべての単項式は、 z のみを含む単項式よりも大きくなるため、その多項式の頭項以外の項も z のみで表される。つまり、この仮定の下では、グレブナ基底のなかに変数 z のみで構成された多項式が含まれることになり、その式を零に等値する方程式により、 z の値は拘束されることになる。式 (6) のグレブナ基底には、変数 z のみで構成される多項式が含まれていない。このことは、イデアル \mathbf{I} のなかに変数 z のみで構成される多項式は含まれず、 x, y の値が決まっていない段階に

Table 1 Mobility analysis table

(Var.: Variable, NewVar.: New Variable, NFV: Number of Free Variables, G_i : Groebner Bases, HV: Hidden Variables)

	Var.	New Var.	NFV
G_1	y, z	y, z	1
G_2	x, y, z	x	0
G_3	x, y, z	-	0
G_4	x, y, z	-	0
HV	-	-	0
DOF = 1			

おいては、 z の値を自由に設定できることを意味している。

次に、変数 z に次いで低位の変数 y を加え、イデアル \mathbf{I} のなかに、変数 y, z のみで構成される多項式が存在すると仮定して同様の考察を行うと、この仮定の下では、グレブナ基底のなかに変数 y, z のみで構成された多項式が含まれることが分かる。そして、この式を零に等値した方程式が、変数 y, z を拘束する式となる。式 (6) のグレブナ基底においては、多項式 G_1 がこれに相当するが、前段の考察、 x, y の値が決まっていない段階においては z の値を自由に設定できることを併せて考えると、 x の値が決まっていない段階で方程式 $G_1 = 0$ を評価すると、変数 y, z のいずれか一方の値を自由に設定できることになる。

今、 z (または y) の値を決めたとすると、方程式 $G_1 = 0$ により y (または z) の値が自動的に決まることになる。式 (6) のグレブナ基底には、変数 x, y, z すべてを含む三つの多項式 G_2, G_3, G_4 が含まれているが、変数 y, z の値はすでに決まっているため、方程式 $G_2 = 0, G_3 = 0, G_4 = 0$ により変数 x の値は自動的に決まることになる。これで、すべての変数の値が決まったが、この過程で自由に設定することのできた変数は 1 個 (y または z) であった。つまり、自由度は 1 であると判定できる。

Table 1 は、この自由度判定の過程を表にまとめたものである。グレブナ基底を構成する多項式 G_1 には、変数 (Var.) y, z が含まれる。そのうち自由に設定できる変数の数は 1 である (NFV=1)。 G_2 には変数 x, y, z が含まれるが、 $G_1 = 0$ を評価した段階で y, z の値が決まっているため、ここで新たに現れた変数 (New Var.) x の値は自由に選ぶことはできない (NFV=0)。 G_3, G_4 には、新たな変数は現れないため自由に値を選べる変数は存在しない (NFV=0)。さらに、グレブナ基底に現れない変数 (HV) を確認しておく必要がある。グレブナ基底に現れない変数はなんらの拘束も受けないため、その変数の数だけ自由に値を選べる変数の数 NFV が増えることになる (グレブナ基底が「1」となる場合を除く[†])。最後に、NFV を合計することにより、自由度が 1 と判定できる。以降、この表のことを「自由度判定表」と呼ぶことにする。

以上のように、辞書式順序により計算したグレブナ基底を、より低位の変数で構成された多項式から順に変数の現れ方を見ていくことにより、自由度を機械的に判定することができる。

[†]「1」というグレブナ基底で生成されるイデアルは、指定した変数で構成された多項式をすべて含む (式 (5) 参照)。例えば、連立方程式 $\{x - 1 = 0, x - 2 = 0\}$ に解がないことから分かるように、このイデアルに共通解は存在しない。つまり、自由度は 0 である。

3. ロボット機構の自由度判定

3.1 基本方針

前章までの議論によって、ロボット機構に含まれる拘束条件を連立代数方程式として表現できれば、そのグレブナ基底を求めることにより機械的に自由度を判定できると期待できる。

拘束条件を連立代数方程式として表現するには、様々な方法が考えられる。例えば、Fig.2のような回転関節のみで構成された平面機構であるならば、関節位置の座標を変数とし、関節間の距離が一定という条件を表現すればよい。しかし、機構のタイプに応じて、変数設定や拘束条件の表現方法に発見的手続きを要求したとすれば、自由度を判定できたとしても、それは、「機械的」自由度判定とは言えない。つまり、拘束条件を連立代数方程式として表現する段階においても、機械的であることが要求される。加えて、グレブナ基底の計算コストを考えると、連立代数方程式に現れる変数の数は少ないほうが有利である。

本章では、これらのことを基本方針とし、ロボット機構に含まれる拘束条件を連立代数方程式として表現する方法を示し、さらに、それをもとに自由度を判定する方法を示す。

3.2 デュアルクォータニオンによる剛体の状態表現

ロボット工学の分野では、剛体の状態の表現方法として、三次元ベクトルによる並進表現とオイラー角による姿勢表現を組み合わせた6個の変数による表現が広く用いられている。さらに、オイラー角 α_i を $p_i = \tan \alpha_i / 2$ によって変数 p_i に変換すると、 $\sin \alpha_i = 2p_i / (1 + p_i^2)$ 、 $\cos \alpha_i = (1 - p_i^2) / (1 + p_i^2)$ なる関係が成り立つため、各成分を有理多項式として表現することが可能となる [13]。しかし、ジンバルロックとして知られる状態表現上の特異点が存在する [22]、 $\alpha_i = \pi$ における p_i が定義されない等の問題点のため、例外的な処理が必要となり、この方法をもとに拘束条件を記述しては、機械的適用可能性を確保することが難しい。ところで、McCarthy は、文献 [23] において、このような問題点を含まないデュアルクォータニオンによる状態表現を用いた運動学解析の有効性について論じている。

4個の数の組 (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) によって次式のように定義される数 \mathbf{Z} をクォータニオンと呼ぶ。

$$\mathbf{Z} = Z_1 \mathbf{i} + Z_2 \mathbf{j} + Z_3 \mathbf{k} + Z_4 = \mathbf{Z}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は、 $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ 、 $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ 、 $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$ 、 $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$ なる演算則を満たす。特に、 $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = 1$ を満たすものを単位クォータニオンと呼び、これによって、三次元空間内の剛体の回転を表現できることが知られている [23] [24]。ここで、単位回転軸ベクトルを (s_x, s_y, s_z) 、回転軸回りの回転角度を ϕ とすると、クォータニオンの各成分は次式のように対応する。

$$\begin{aligned} Z_1 &= s_x \sin(\phi/2), & Z_2 &= s_y \sin(\phi/2), \\ Z_3 &= s_z \sin(\phi/2), & Z_4 &= \cos(\phi/2) \end{aligned} \quad (8)$$

このクォータニオンによる姿勢表現は、数式処理を含む代数的手法を用いた機構解析において広く用いられている [12] [17] [21]。

さらに、2個のクォータニオンの組 $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^0)$ 、つまり、8個の数の組 (Z_1, Z_2, \dots, Z_8) によって次式のように定義される数 $\hat{\mathbf{Z}}$ をデュアルクォータニオンと呼ぶ。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}} &= \mathbf{Z} + \epsilon \mathbf{Z}^0 \\ &= (Z_1 \mathbf{i} + Z_2 \mathbf{j} + Z_3 \mathbf{k} + Z_4) + \epsilon (Z_5 \mathbf{i} + Z_6 \mathbf{j} + Z_7 \mathbf{k} + Z_8) \\ &= \hat{\mathbf{Z}}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 ϵ は $\epsilon^2 = 0$ なる演算則を満たす。特に、二つの条件、

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 - 1 = 0 \quad (10)$$

$$Z_1 Z_5 + Z_2 Z_6 + Z_3 Z_7 + Z_4 Z_8 = 0 \quad (11)$$

を満たすデュアルクォータニオンによって三次元空間内の剛体の状態を表現できることが知られている [23] [24]。例えば、単位クォータニオン $\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}(r_1, r_2, r_3, r_4)$ なる純粋回転 $\hat{\mathbf{Z}}_R$ 、および、ベクトル (t_x, t_y, t_z) なる純粋並進 $\hat{\mathbf{Z}}_T$ は、それぞれ、次式のように表現される。

$$\hat{\mathbf{Z}}_R = \hat{\mathbf{Z}}(r_1, r_2, r_3, r_4, 0, 0, 0, 0) \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_T = \hat{\mathbf{Z}}(0, 0, 0, 1, t_x/2, t_y/2, t_z/2, 0) \quad (13)$$

さらに、三次元空間内の剛体の一般の状態は、これらの積 $\hat{\mathbf{Z}}_T \hat{\mathbf{Z}}_R$ によって表すことが可能である [24]。なお、デュアルクォータニオンの積は、行列を通して計算することができるが、これについては文献 [23] を参照されたい。

デュアルクォータニオン形式の状態表現 (8 変数) は、三次元ベクトルとオイラー角を組み合わせた状態表現 (6 変数) に比べて多くの変数を必要とするものの、その構造自体が三次元ユークリッド運動群の構造に適合しており状態表現上の特異点が存在しない [23]、各成分を単純に等値することで拘束条件を代数方程式として容易に表現できる等の利点を有する。これらは、機械的適用可能性の確保の観点において特に好都合である。McCarthy [23] は、デュアルクォータニオンを用いた運動学解析例として、回転関節と円筒関節によって構成されたいくつかの単ループ機構の Constraint Manifold (手先変数によって構成される多様体) の導出を行っている。その過程で、拘束条件の記述も行っているが、三角関数を消去する過程に発見的手続きが要求されるなど、機械的適用についてはあまり考慮されていない。そこで、デュアルクォータニオンを用い、拘束条件を機械的に連立代数方程式として表現する方法について以下に論じる。

3.3 リンク—関節直鎖の状態表現

物体 A に固定された座標系 Σ_A から見た、物体 B に固定された座標系 Σ_B の状態を表すデュアルクォータニオンを $\hat{\mathbf{Z}}_{A-B}$ と書くことにする。Fig.6 は、回転関節、直動関節、円筒関節、球関節それぞれによって互いに結合された二つの物体 A, B について、 $\hat{\mathbf{Z}}_{A-B}$ を表したものである (式 (8) (12) (13) 参照)。例えば、 z 軸を関節軸とする円筒関節 (z 軸まわりに 2θ 回転、 z 軸方向に $2t$ 並進) では、 $\hat{\mathbf{Z}}_{A-B} = \hat{\mathbf{Z}}(0, 0, 0, 1, 0, 0, t, 0)$ 、 $\hat{\mathbf{Z}}(0, 0, s, c, 0, 0, 0, 0) = \hat{\mathbf{Z}}(0, 0, s, c, 0, 0, ct, -st)$ のように、3個の関節変数 s, c, t による多項式と、一つの代数方程式

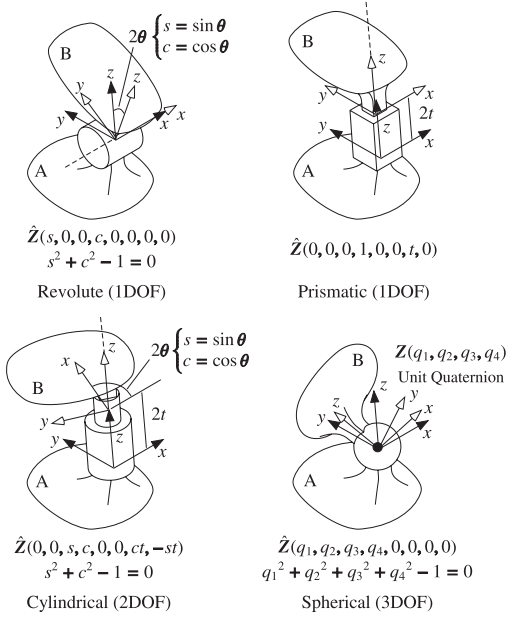


Fig. 6 Algebraic representation of joint constraint

$s^2 + c^2 - 1 = 0$ によって表される。ただし、 $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$ である。

また、Fig. 7 のように、二つの剛体が、関節とリンクの直鎖によって結合されている場合、隣接するリンク間の状態を表すデュアルクォータニオンを順次掛けていくことにより、状態を記述することができる。Fig. 7 の場合、物体 A, D が、「球関節—リンク B—直動関節—リンク C—回転関節」からなる直鎖で結合されているが、 \hat{Z}_{A-D} は次式のようになる。

$$\hat{Z}_{A-B} = \hat{Z}(q_1, q_2, q_3, q_4, 0, 0, 0, 0) \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) = \hat{Z}(q_1, q_2, q_3, q_4, -q_3, q_4, q_1, -q_2) \quad (14)$$

$$\hat{Z}_{B-C} = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, t, 0, 0) \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, t+1, 0, 0) \quad (15)$$

$$\hat{Z}_{C-D} = \hat{Z}(s, 0, 0, c, 0, 0, 0, 0) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{A-D} &= \hat{Z}_{A-B} \hat{Z}_{B-C} \hat{Z}_{C-D} \\ &= \hat{Z}(cq_1 + sq_4, cq_2 + sq_3, cq_3 - sq_2, cq_4 - sq_1, \\ &\quad -2cq_3 - 2sq_2 - ctq_3 - stq_2, \\ &\quad 2cq_4 + 2sq_1 + ctq_4 + stq_1, \\ &\quad 2cq_1 - 2sq_4 + ctq_1 - stq_4, \\ &\quad -2cq_2 + 2sq_3 - ctq_2 + stq_3) \end{aligned} \quad (17)$$

\hat{Z}_{A-D} の各成分が、関節変数 $q_1, q_2, q_3, q_4, t, s, c$ に関する多項式として表されたが、これと、二つの代数方程式 $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 - 1 = 0$, $s^2 + c^2 - 1 = 0$ を併せたものが、物体 D の A に対する状態表現となる。なお、式 (10) (11) を満たすという性質を有するデュアルクォータニオンどうしを掛

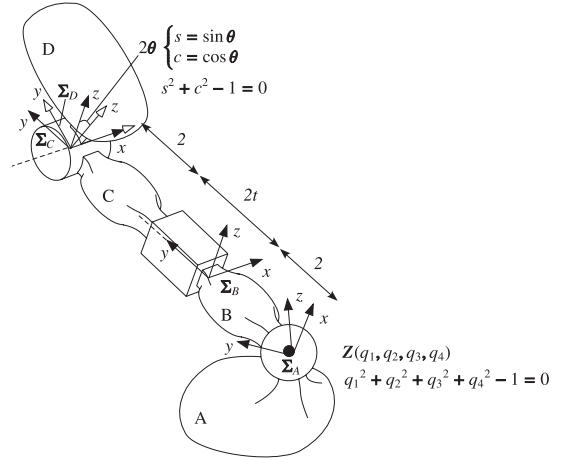


Fig. 7 Algebraic representation of serial chain constraint (Joint variables: $q_1, q_2, q_3, q_4, t, s, c$)

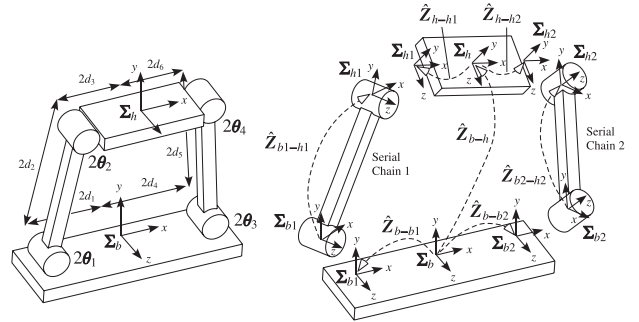


Fig. 8 Generation of constraint equations (Four bar linkage)

けてもこの性質は保存されるため、 \hat{Z}_{A-D} の各成分が式 (10) (11) を満たすという条件は陽に加える必要はない。

3.4 拘束条件の記述と自由度判定

Fig. 8 に示した平面 4 節リンク機構を例にとり、拘束条件を連立代数方程式として表現し、そのグレンナ基底から自由度を判定する過程を説明する[†]。

Fig. 8 において、 Σ_b および Σ_h を、それぞれ、土台と手先に固定された座標系とする。まず、これらのリンクを起点として、機構に含まれるリンク—関節直鎖を抽出すると、Fig. 8 右に示すように、2 本の直鎖（それぞれ 2 個の回転関節を含む）が得られる。そして、3.3 節に示した要領で、直鎖の両端の相対的な状態を表すデュアルクォータニオンを求める。例えば、直鎖 1 に関して、 \hat{Z}_{b1-h1} は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{b1-h1} &= \hat{Z}(0, 0, s_1, c_1, 0, 0, 0, 0) \\ &\quad \hat{Z}(0, 0, 0, 1, d_2, 0, 0, 0) \hat{Z}(0, 0, s_2, c_2, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $2\theta_i$ は関節角度を、 s_i は $\sin \theta_i$ を、 c_i は $\cos \theta_i$ を表す。

次いで、これらを基にして拘束条件を記述していく。土台から直鎖 1 を経由して計算した \hat{Z}_{b-h1} と、土台から手先を經由して計算した \hat{Z}_{b-h1} は一致しなくてはならないため、次の拘束条件が成り立つ必要がある。

$$\hat{Z}_{b-b1} \hat{Z}_{b1-h1} - \hat{Z}_{b-h} \hat{Z}_{h-h1} = 0 \quad (19)$$

[†]平面機構の場合にはプランークォータニオン [23] と呼ばれる数を用いれば、より少ない変数で拘束条件を記述できるが、ここでは、空間機構にも適用可能であることを重視している。

ただし,

$$\hat{Z}_{b-b_1} = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, -d_1, 0, 0, 0) \quad (20)$$

$$\hat{Z}_{h-h_1} = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, -d_3, 0, 0, 0) \quad (21)$$

直鎖 2 についても同様に考えて,

$$\hat{Z}_{b-b_2} \hat{Z}_{b_2-h_2} - \hat{Z}_{b-h} \hat{Z}_{h-h_2} = 0 \quad (22)$$

さらに, 回転関節に付随する拘束条件 (Fig. 6 参照) として,

$$s_i^2 + c_i^2 - 1 = 0 \quad (i = 1 \sim 4) \quad (23)$$

デュアルクォータニオンは 8 成分を持つので, 式 (19) (22) による拘束条件にそれぞれ 8 個ずつ, 式 (23) による拘束条件に 4 個, 計 20 個の方程式が得られたが, そのすべてが関節変数 $s_1, c_1, \dots, s_4, c_4$ と手先変数 Z_1, Z_2, \dots, Z_8 , 計 16 個の変数に関する代数方程式となっている. なお, リンク-関節直鎖を単位とせずとも, 各リンクの状態を個別に表現しても拘束条件を記述することができるが [12], その場合, 多くの変数を要するためグレブナ基底の計算負荷が増大することになる.

式 (19) (22) (23) による連立代数方程式のグレブナ基底を, 変数順序を $s_1 \succ c_1 \succ \dots \succ s_4 \succ c_4 \succ Z_1 \succ \dots \succ Z_8$ ({ 関節変数 } \succ { 手先変数 }), 項順序を辞書式順序として求めると次式のような 28 個の多項式が得られる.

$$\begin{aligned} G_1 &= Z_8, G_2 = Z_7, G_3 = Z_5^2 Z_6 + Z_6^3 - Z_6, \\ G_4 &= 4Z_4^2 - Z_5^2 - Z_6^2 - 3, G_5 = Z_3 Z_6, \\ G_6 &= 4Z_3^2 + Z_5^2 + Z_6^2 - 1, G_7 = Z_2, G_8 = Z_1, \\ G_9 &= 4c_4^2 - 2Z_4 Z_5 + Z_5^2 + Z_6^2 - 3, \dots, \\ G_{28} &= s_1 + 2c_2 Z_3 - s_2 Z_5 - c_2 Z_6 \end{aligned} \quad (24)$$

ここで, $d_1 = d_2 = \dots = d_6 = 1$ とした.

これをもとに自由度判定表を作成すると Table 2 のようになる. Table 1 と同じ要領で, $G_1 = 0$ から順に評価していくと, $G_3 = 0$ において Z_5 または Z_6 の値を自由に設定できることが分かる (NFV=1). $G_9 = 0$ において初めて関節変数 (c_4)

Table 2 Mobility analysis table (Four bar linkage)

	Var.	New Var.	NFV
G_1	Z_8	Z_8	0
G_2	Z_7	Z_7	0
G_3	Z_5, Z_6	Z_5, Z_6	1
G_4	Z_4, Z_5, Z_6	Z_4	0
G_5	Z_3, Z_6	Z_3	0
G_6	Z_3, Z_5, Z_6	-	0
G_7	Z_2	Z_2	0
G_8	Z_1	Z_1	0
HV(hand)	-	-	0
DOF = 1			
G_9	c_4, Z_4, Z_5, Z_6	c_4	0
$G_{10} \sim G_{28}$	\dots	\dots	0
HV(joint)	-	-	0
Passive DOF = 0			
RESULT			
1 DOF Mechanism without Passive DOF			

が現れるため, その一つ前の $G_8 = 0$ までに, 手先変数に関する拘束が現れているはずである. G_1 から G_8 までに現れない手先変数 HV (hand) は存在しないため, 結局, Z_5 または Z_6 いずれか一つの値を設定すれば, 手先変数 $Z_1 \sim Z_8$ がすべて定まることになる. この時点で, この機構の自由度は 1 と判定できる (本稿では, 自由度を手先と土台の間の相対運動の自由度と定義している). 引き続き, $G_9 = 0$ から $G_{28} = 0$ へ順に評価を進めると, 関節変数が連鎖的にすべて定まることが確認できる (G_9 から G_{28} までに現れない関節変数 HV (joint) も存在しない).

グレブナ基底を計算する際, 変数順序を { 関節変数 } \succ { 手先変数 } と設定した点に注意されたい. より低位の変数から順に値が決まっていくため, この例で見たように, 手先変数から順に値が決まることになる. 手先変数の値がすべて決まってもなお自由に設定できる関節変数があったとすると, その関節の動きは, 手先の動きに影響を与えない機構の内部的な動きであることを意味する. このような動きに起因する自由度 Passive DOF [3] は, 変数順序を { 関節変数 } \succ { 手先変数 } とすることによって, その判別が可能となる (4.1 節参照).

なお, この自由度判定の過程は計算機プログラムとして容易に実装することができる. 次章で示す適用例のなかには, グレブナ基底に 200 個以上の多項式を含むものもあるが, このような機構の自由度も計算機によって容易に判定することができる.

4. 適用例

4.1 SS-RR リンク機構

Fig. 9 は, 平面 4 節リンク機構の 4 個の回転関節のうち 2 個を球関節に置換えた機構である. クッツバツハの式 (式 (1) 参照) に, $\lambda = 6, n = 4, j = 4, \sum f_i = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$ (3 自由度関節と 1 自由度関節が 2 個ずつ) を代入すると, $F = 2$ となる. しかし, このうちの 1 自由度は, Passive DOF である (Fig. 9 右参照). この機構の自由度を提案する手法で判定してみよう.

まず, 3.4 節と同様の手順で拘束条件を構成する. 式 (19) (22) による拘束条件は, $\hat{Z}_{b_1-h_1}$ を次式のように置き換えることで, 本機構に対してもそのまま適用できる.

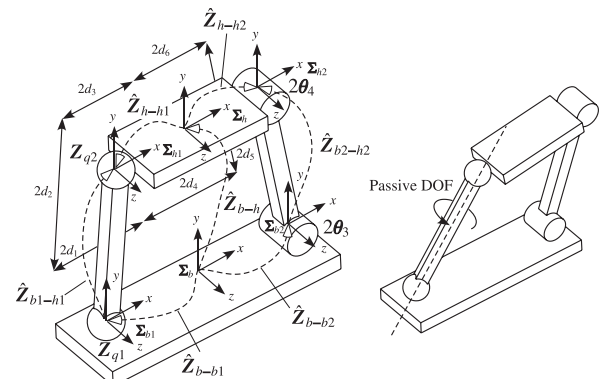


Fig. 9 SS-RR linkage (1 DOF + 1 Passive DOF)

Table 3 Mobility analysis table (SS-RR linkage)

	Var.	New Var.	NFV
G_1	Z_8	Z_8	0
G_2	Z_7	Z_7	0
G_3	Z_5, Z_6	Z_5, Z_6	1
G_4	Z_4, Z_5, Z_6	Z_4	0
G_5	Z_3, Z_6	Z_3	0
G_6	Z_3, Z_5, Z_6	-	0
G_7	Z_2	Z_2	0
G_8	Z_1	Z_1	0
HV(hand)	-	-	0
DOF = 1			
G_9	c_4, Z_4, Z_5, Z_6	c_4	0
$G_{10} \sim G_{17}$	0
G_{18}	$q_{13}, q_{14}, Z_4, Z_5, Z_6$	q_{13}, q_{14}	1
$G_{19} \sim G_{36}$	0
HV(joint)	-	-	0
Passive DOF = 1			
RESULT			
1 DOF Mechanism with 1 Passive DOF			

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{b1-h1} &= \hat{Z}(q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, 0, 0, 0, 0) \\ &\hat{Z}(0, 0, 0, 1, d_2, 0, 0, 0) \\ &\hat{Z}(q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $q_{11} \sim q_{14}$ および $q_{21} \sim q_{24}$ は、各球関節の回転状態を表す単位クォータニオンの成分である。さらに、球関節および回転関節に付随する拘束条件 (Fig. 6 参照) として次式を加える。

$$q_{i1}^2 + q_{i2}^2 + q_{i3}^2 + q_{i4}^2 - 1 = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (26)$$

$$s_i^2 + c_i^2 - 1 = 0 \quad (i = 3, 4) \quad (27)$$

$d_1 = d_2 = \dots = d_6 = 1$, 変数順序を $q_{21} \succ \dots \succ q_{24} \succ q_{11} \succ \dots \succ q_{14} \succ s_3 \succ c_3 \succ s_4 \succ c_4 \succ Z_1 \succ \dots \succ Z_8$ ({ 関節変数 } > { 手先変数 }) とし、項順序を辞書式順序としてグレブナ基底を求めると、36 個の多項式が得られる。

その自由度判定表を **Table 3** に示す。3.4 節と同様の手順によって、 $G_1 = 0$ から順に $G_8 = 0$ まで評価し、HV (hand) が存在しないことを確認すると、手先変数 Z_5 または Z_6 の値を設定すれば、すべての手先変数が定まることが分かる。つまり、この時点で、この機構の自由度が 1 であると判定される。さらに、評価を進めていくと $G_{18} = 0$ の時点で、関節変数 q_{13} または q_{14} を自由に設定できることが判明する。すでに手先リンクの状態は定まっているので、ここで現れた 1 自由度は Passive DOF である。そして、 $G_{36} = 0$ まで評価し、HV (joint) が存在しないことを確認して、この機構は 1 自由度の Passive DOF を有する 1 自由度機構であるとの判定結果が得られる。

このように、提案した自由度判定法によれば、Passive DOF を含む機構についても、機械的に自由度を判定することが可能である。

4.2 2-RC リンク機構

Fig. 10 は、文献 [5] において Paradoxical Chain として分類されている機構で、2 個の回転関節と 2 個の円筒関節によって構成されている。クッツパツハの式 (式 (1) 参照) に、 $\lambda = 6$, $n = 4$, $j = 4$, $\sum f_i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$ (2 自由度関節と 1 自

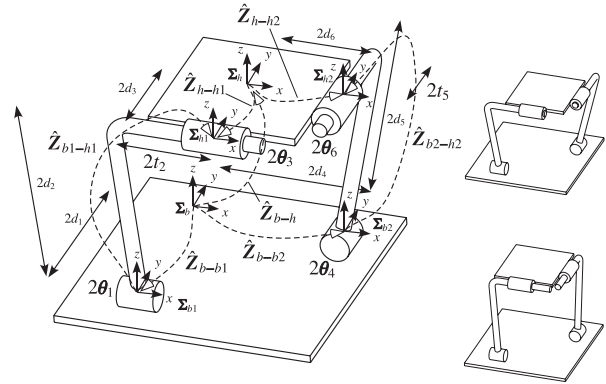


Fig. 10 2-RC linkage (1 DOF)

由度関節が 2 個ずつ) を代入すると $F = 0$ となるが、実際には 1 自由度を有する機構である。

以下のように各デュアルクォータニオンを設定し、式 (19) (22) による拘束条件、および、回転関節と円筒関節に付随する拘束条件 $s_i^2 + c_i^2 - 1 = 0$ ($i = 1, 3, 4, 6$) により、拘束条件を表す連立代数方程式を構成することができる。

$$\hat{Z}_{b-b1} = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, -d_1, 0, 0) \quad (28)$$

$$\hat{Z}_{h-h1} = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, -d_3, 0, 0) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{b1-h1} &= \hat{Z}(s_1, 0, 0, c_1, 0, 0, 0, 0) \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, d_2, 0, 0) \\ &\hat{Z}(0, 0, 0, 1, t_2, 0, 0, 0) \hat{Z}(s_3, 0, 0, c_3, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\hat{Z}_{b-b2} = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, d_4, 0, 0, 0) \quad (31)$$

$$\hat{Z}_{h-h2} = \hat{Z}(0, 0, 0, 1, d_6, 0, 0, 0) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{b2-h2} &= \hat{Z}(0, s_4, 0, c_4, 0, 0, 0, 0) \hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, 0, d_5, 0) \\ &\hat{Z}(0, 0, 0, 1, 0, -t_5, 0, 0) \hat{Z}(0, s_6, 0, c_6, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (33)$$

$d_1 = d_4 = 2$, $d_2 = d_5 = 3$, $d_3 = d_6 = 1$, 変数順序を $s_1 \succ c_1 \succ t_2 \succ \dots \succ t_5 \succ s_6 \succ c_6 \succ Z_1 \succ \dots \succ Z_8$ ({ 関節変数 } > { 手先変数 }) とし、項順序を辞書式順序としてグレブナ基底を求めると、33 個の多項式が得られる。そして、自由度判定表 **Table 4** から、Passive DOF を含まない 1 自由度機構であるとの判定結果が得られる。

4.3 3-PRRR プラットフォーム

Fig. 11 は、一つの直動関節と三つの回転関節からなる直鎖を 3 本組み合わせさせたプラットフォーム型パラレルマニピュレータである [25]。クッツパツハの式 (式 (1) 参照) に、 $\lambda = 6$, $n = 11$, $j = 12$, $\sum f_i = 12$ を代入すると $F = 0$ となるが、実際には、手先は 3 自由度並進運動を行うことができ (Fig. 11 下参照)、自由度 3 を有する機構である。なお、この機構は Gogu が文献 [6] において、様々な自由度判定式を評価する際のベンチマークとして用いた機構である。

3 本の直鎖について、これまでと同じ要領で拘束条件を記述すると、21 個の関節変数 $s_1, c_1, \dots, s_9, c_9, t_1, t_2, t_3$, 8 個の手先変数 Z_1, \dots, Z_8 , 計 29 個の変数を持ち、33 個の方程式 (うち 9 個が回転関節に付随する拘束条件) からなる、連立代数方程式が得られる。そして、そのグレブナ基底を、変数順序を $s_1 \succ c_1 \succ \dots \succ s_9 \succ c_9 \succ t_1 \succ t_2 \succ t_3 \succ Z_1 \succ \dots \succ Z_8$

Table 4 Mobility analysis table (2-RC linkage)

	Var.	New Var.	NFV
G_1	Z_8	Z_8	0
G_2	Z_6, Z_7	Z_6, Z_7	1
G_3	Z_5, Z_6, Z_7	Z_5	0
G_4	Z_5, Z_6, Z_7	—	0
G_5	Z_5, Z_6, Z_7	—	0
G_6	Z_4, Z_6, Z_7	Z_4	0
G_7	Z_4, Z_6, Z_7	—	0
G_8	Z_4, Z_5, Z_7	—	0
G_9	Z_4	—	0
G_{10}	Z_3	Z_3	0
G_{11}	Z_2	Z_2	0
G_{12}	Z_1	Z_1	0
HV(hand)	—	—	0
DOF = 1			
G_{13}	c_6, Z_4, Z_7	c_6	0
$G_{14} \sim G_{33}$	0
HV(joint)	—	—	0
Passive DOF = 0			
RESULT			
1 DOF Mechanism without Passive DOF			

Table 5 Mobility analysis table (3-PRRR platform)

	Var.	New Var.	NFV
G_1	Z_8	Z_8	0
G_2	Z_4	Z_4	0
G_3	Z_3	Z_3	0
G_4	Z_2	Z_2	0
G_5	Z_1	Z_1	0
HV(hand)	Z_5, Z_6, Z_7	Z_5, Z_6, Z_7	3
DOF = 3			
G_6	t_3, Z_7	t_3	0
G_7	t_2, Z_5	t_2	0
G_8	t_1, Z_6	t_1	0
G_9	c_9	c_9	0
$G_{10} \sim G_{220}$	0
HV(joint)	—	—	0
Passive DOF = 0			
RESULT			
3 DOF Mechanism without Passive DOF			

5. おわりに

本稿では、数式処理を用いてロボット機構の自由度を機械的に判定する手法を提案し、その有効性を示した。

- 複数の代数曲面の共有部分を動く点の自由度を求めるという問題を例に、グレブナ基底を用いた自由度判定の基本原則について論じた。
- デュアルクォータニオンによる剛体の状態表現、リンク—関節直鎖を単位とした拘束条件の記述により、多様な関節を含む空間機構の拘束条件を、連立代数方程式として機械的に表現できることを示した。
- 拘束条件を表す連立代数方程式のグレブナ基底を、変数順序を { 関節変数 } > { 手先変数 }, 項順序を辞書式順序として計算すると、グレブナ基底を構成する多項式における変数の現れ方から自由度を機械的に判定できることを示した。
- Passive DOF を含む機構をはじめ、クッツバツハ例外とされる 3 種類の機構に対して本手法を適用し、これらの機構の自由度を機械的に正しく判定できることを示した。

本手法では、グレブナ基底計算、デュアルクォータニオン形式による拘束条件の表現といった手続きが要求され、従来手法に比べて計算コストが高い。しかし、本手法は、発見的手続きが要求されないため機械的に適用することが可能、さらに、数式処理によるシンボリックな計算だけで構成されているため数値誤差の影響が皆無であり判定結果の信頼性が高いという大きな利点を有する。

今後、グレブナ基底計算における変数順序の生成法の検討、機構の位相構造情報 [2] の活用などにより計算コストの低減を図り、さらに実用性の高い自由度判定法を目指していく予定である。

参考文献

- [1] J. Phillips: Freedom in Machinery: Volume 1 (1984) and Volume 2 (1990) Combined. Cambridge University Press, 2006.
- [2] 有川: “非従来型位相構造を有するロボット機構の生成—非従来型位相構造の列挙と機構生成支援—”, 日本ロボット学会誌, vol.25, no.6,

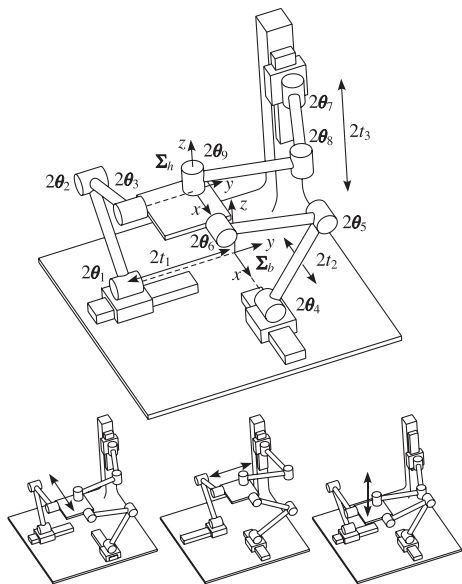


Fig. 11 3-PRRR platform (3 DOF)

{ 関節変数 } > { 手先変数 } とし、項順序を辞書式順序として求めると 220 個の多項式が得られる。

その自由度判定表を Table 5 に示す。これまでと同じ要領で、 $G_1 = 0$ から順に評価していくと $G_6 = 0$ で初めて、関節変数 (t_3) が現れることが分かる。したがって、一つ前の $G_5 = 0$ を評価する段階で、自由度を判定できるはずである。手先変数 Z_5, Z_6, Z_7 は $G_1 \sim G_5$ に現れないため HV (hand) に該当するが、前述したように、このような変数は拘束を受けないため、自由に値を設定することができる。つまり、自由度 3 であると判定される。引き続き、 $G_6 = 0$ から順に $G_{220} = 0$ まで評価し、この機構には Passive DOF は含まれないことが判明する。なお、 Z_5, Z_6, Z_7 を自由に設定できることから手先が 3 自由度並進運動可能であるということも分かる (式 (13) 参照)。

- pp.930–937, 2007.
- [3] L.W. Tsai: Robot Analysis. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [4] J.M. Hervé: “The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design,” Mechanism and Machine Theory, vol.34, pp.719–730, 1999.
- [5] J.M. Rico and B. Ravani: “On Mobility Analysis of Linkages Using Group Theory,” Journal of Mechanical Design, vol.125, pp.70–80, 2003.
- [6] G. Gogu: “Mobility of mechanisms: a critical review,” Mechanism and Machine Theory, vol.40, pp.1068–1097, 2005.
- [7] 余, 裴, 辻尾: “閉リンクパラレルマニピュレータの順ヤコビアン解析”, 第6回システムインテグレーション部門学術講演会予稿集, pp.683–684, 2005.
- [8] J.S. Dai, Z. Huang and H. Lipkin: “Mobility of Overconstrained Parallel Mechanisms,” Journal of Mechanical Design, vol.128, pp.220–229, 2006.
- [9] J.M. Rico and B. Ravani: “On Calculating the Degrees of Freedom or Mobility of Overconstrained Linkages: Single-Loop Exceptional Linkages,” Journal of Mechanical Design, vol.129, pp.301–311, 2007.
- [10] J.M. Rico, G.I. Perez, A. Tadeo and C.R. Diez: “Mobility and Overconstraint in Kinematic Chains and Assemblies,” Proc. of ASME 2007 IDETC 31st Mechanisms and Robotics Conference, CR-ROM DETC2007-34937, 2007.
- [11] A. Müller: “Generic Mobility of Rigid Body Mechanisms,” Mechanism and Machine Theory, vol.44, pp.1240–1255, 2008.
- [12] J. Tuomela: “Kinematic Analysis of Multibody Systems,” BIT Numerical Mathematics, vol.48, pp.405–421, 2008.
- [13] コックス, リトル, オシー: グレブナー基底と代数多様体入門 (上・下). シュプリンガー・フェアラーク東京, 1991.
- [14] 野呂, 横山: グレブナー基底の計算 基礎篇 計算代数入門. 東京大学出版会, 2003.
- [15] 齋藤, 竹島, 平野: グレブナー基底の計算 実戦篇 Risa/Asir で解く. 東京大学出版会, 2003.
- [16] 日比: グレブナー基底. 朝倉書店, 2003.
- [17] B. Mourrain: “The 40 “generic” positions of a parallel robot,” International Conference on Symbolic and Algebraic Computation, pp.173–182, 1993.
- [18] M. Raghavan and B. Roth: “Solving Polynomial Systems for the Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms and Robot Manipulators,” Journal of Mechanical Design, vol.117, pp.71–79, 1995.
- [19] 川崎, 清水: “ロボット数式処理システム ROSAM II の開発”, 日本ロボット学会誌, vol.17, no.3, pp.408–415, 1999.
- [20] L. Rolland: “Certified Solving of the Forward Kinematics Problem with an Exact Algebraic Method for the General Parallel Manipulators,” Advanced Robotics, vol.19, no.9, pp.995–1025, 2005.
- [21] S. Piipponen, J. Tuomela and T. Arponen: “Kinematical Analysis of Overconstrained Mechanism Using Computational Geometric Algebra,” Proc. of ASME 2008 IDETC 32nd Mechanisms and Robotics Conference, CR-ROM DETC2008-49193, 2008.
- [22] R.N. Jazar: Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control. Springer, 2007.
- [23] J.M. McCarthy: An Introduction to Theoretical Kinematics. The MIT Press, 1990.
- [24] C.M. Hoffmann and W. Yang: “Compliant Motion Constraints,” Proceedings of Asian Symposium on Computer Mathematics, pp.1–16, 2003.
- [25] H.S. Kim and L.W. Tsai: “Design Optimization of a Cartesian Parallel Manipulator,” Journal of Mechanical Design, vol.125, pp.43–51, 2003.



有川敬輔 (Keisuke Arikawa)

2000年東京工業大学大学院理工学研究科機械物理学専攻博士後期課程修了。博士(工学)。2000～2002年日本学術振興会特別研究員(東京工業大学)。2002年神奈川工科大学工学部機械工学科講師。2004年同助教授。2007年同准教授。多自由度機械の設計, 脚型ロボットの機構と制御の研究に従事。“2008 ASME 32nd Mechanisms and Robotics Conference”にて Best Paper Award 受賞。日本機械学会, ASME の会員。
(日本ロボット学会正会員)